我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

概率统计20——估计量的评选标准

对总体参数进行估计的方式多种多样，为了评判估计量的优劣，我们需要借助一些评选标准。

这些乱七八糟的符号

我觉得参数估计总是人为地设计各种门坎，里面参杂着各种符号，一会儿是X，一会儿是x；一会儿是θ，一会儿是θ(X)；还有诸如“总体参数”、“待估计参数”这类名词，究竟是几个意思？

有必要先理清这些符号。

我们用全国18~50岁的男性身高为例，所有18~50岁的男性是总体。在概率统计中，当我们说到总体，就是指一个具有特定概率分布的随机变量，这个随机变量用X表示，X符合某某分布。n表示总体的数量，假设这些男性有3亿，那么n就等于3亿。在做统计的时候肯定不能普查所有人，这样成本也太高了，因此才有抽样。当然抽样也有多种形式，比如均匀抽样、拒绝抽样等，这是另外的话题，在数据分析专栏中将陆续展开。

现在调查了100万个符合条件的男性，这些男性就构成了“整体中的一个样本”，用$X_1, X_2, ..., X_m$表示，X_i表示样本中的第i个男性，m是样本的容量，m等于100万。样本中的每个男性都有特定的身高，是一个具体的数值，这个值用小写的x表示，x_{10} = 176cm表示样本中的第10个数据的值是176cm，此时$X_{10} = x_{10}$。这有点类似于P(X=x)的意思，X表示随机变量本身，x表示某个特定的数值。

值得注意的是，如果用$X_1, X_2, ..., X_m$表示样本，则强调样本是随机的，是理论上的、尚未诞生的样本，样本中的每个数据都是一个随机变量；如果用$x_1, x_2, ..., x_m$表示样本，则强调样本中的随机变量已经有了特定的取值，是已经拥有的样本。

此外，n的值不一定很大，如果调查某个特定班级的平均身高，那么n的值就只是这个班级的学生数，比如n=60。n也不一定是个确定的值，比如从建国到现在全国人民一共消费了多少斤啤酒，没有具体的数，只知道这个数大到没边。

现在我们知道18~50岁的男性身高符合某个均值为μ，方差为σ^2的正态分布$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ和σ^2称为“总体的参数”，正是这两个值决定了分布的具体形态，用大Θ表示总体参数的集合。总体参数不止一个，这里的μ和σ^2都是总体的参数。θ是总体中的某一个参数，它可以代表μ，也可以代表σ^2，有点变量的意思，可能用x比用θ更好理解，但是x已经被占用了。此外，用$\bar{x}$表示样本的均值，用S^2表示样本的方差。

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

现在θ的具体值是多少不知道，需要根据样本$X_1, X_2, ..., X_m$估计总体参数θ，具体估计量用$\hat{\theta}$表示。$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_m)$表示$\hat{\theta}$是由具体的样本$X_1, X_2, ..., X_m$估计出来的，$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_m)$仅仅是为了强调这一点，至于怎么估计是另一回事。这也有点类似于y = y(x)，第一个y是个具体的数值，这个数值是由x决定的，第二个y是一个映射关系，至于是什么映射关系是另一回事。有时候也把m个样本记作X = {$X_1, X_2, ..., X_m$}，因此有了$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$，如果用θ表示μ，就有了$\hat{\mu} = \hat{\mu}(X)$。这里的X不再是总体，而是来自于总体中的样本，至于X到底是总体还是样本，需要根据上下文确定。

多个参数产生的问题

已知总体的均值是μ，方差是$\sigma^2>0$，但是不知道二者的具体数值，作为补偿，我们拥有总体中m个数据样本，$X_1, X_2, ..., X_m$。现在想要通过这些样本估计总体的概率分布模型，即通过样本估计μ和σ^2的具体数值。

已知总体有期望和方差两个数字特征，但不知道具体值，这比直接说啥也不知道强不了多少。

假设我们已经使用直方图之类的工具分析过样本，或直接咨询过领域内的相关专家，得知总体应当符合正态分布，X~N(μ, σ^2)。现在我们可以用多种方法估计μ和σ^2?

点估计和连续性修正（概率统计17）中的介绍，样本矩的估计量是：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \hat{\mu})^2$$

一维正态分布的最大似然估计（概率11）中，最大似然估计也能得到类似的结论：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \hat{\mu})^2$$

当m很大时，1/m和1/(m-1)的差距也很小，可以认为矩估计和最大似然估计的结论相等。我们能否因此得出一个结论，说两种估计法在任何分布下得到的结论都相同?

还是估计总体的均值和方差，这次从样本的分析中得知，总体可能符合X~[a, b]的均匀分布。

在再看大数定律（概率统计18）.中我们已经知道均匀分布的密度函数，从而求得均匀分布的均值和方差：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\mu = E[X] = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

使用矩估计求得样本的均值和方差时，我们将认为样本矩等于总体矩，从而得到一个关于a和b的方程组，进而求得a和b的矩估计量：

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\mu\\ \hat{\sigma}^2=\sigma^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{2}=\hat{\mu}\\ \frac{(b-a)^2}{12}=\hat{\sigma}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{a}=\hat{\mu}-\sqrt{3}\hat{\sigma}\\ \hat{b}=\hat{\mu}+\sqrt{3}\hat{\sigma}\end{cases}$$

这里也可以看出，矩估计的优点就是简单，不管总体服从什么分布，样本矩的计算方法都一样。

现在来看均匀分布下样本的最大似然估计。

用x_{min}和x_{max}表示样本值中最小的和最大的，对于X~[a, b]来说，所有样本的取值都在a,b之间，即$x_{min} \geq a$，$x_{max} \leq b$，似然函数是：

$$L(x;a,b)=\prod_{i=1}^{m}P(x_i;a,b)=\frac{1}{(b-a)^m}$$

之后的目标是根据样本找到L(x;a,b)最大时a,b的取值：

$$\max_{a,b}L(x;a,b)$$

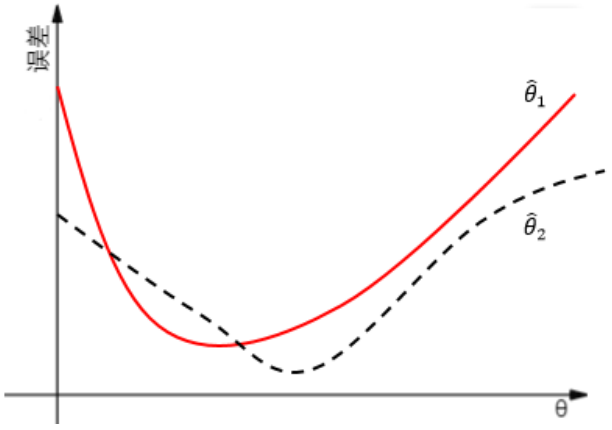
$$x_{max}-x_{min}\leq b-a\Rightarrow\frac{1}{b-a}\leq\frac{1}{x_{max}-x_{min}}\Rightarrow\frac{1}{(b-a)^m}\leq\frac{1}{(x_{max}-x_{min})^m}$$

$$\Rightarrow\hat{a}=x_{min},\qquad\hat{b}=x_{max}$$

这个结果和矩估计明显不同。

现在的问题是，我们分不出这两个估计量的优劣。这就是我们要面对的新问题。

我们用$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$表示两种方案的估计量。对于不同的估计量，与真实值的差误差也不同，无法仅凭一个数值来评估估计量，而是使用一条曲线：



对于某些估计而言$\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2$，对于另外一些则可能相反。这就好比两个人的考试成绩，甲的语文成绩比较好，而乙的数学成绩更优秀。能否找出一个全优的学生呢？也就是对于整体中的全部参数，我们都希望估得最佳结果，以使得根据样本估计的分布接近整体分布。这是个美好的愿望，随着待估计参数的增加，找到全优学生的难度也急剧增大。因此为了找出最优估计

量，我们必须添加一些额外的评判规则。这就涉及到如何评估估计量的问题。较为常用的三个标准是无偏性、有效性和相合性。

无偏性

$X_1, X_2, \ldots, X_m$是来自于总体中的样本，θ是总体分布的参数，θ∈Θ，根据样本可以得到θ的估计量：

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_m)$$

如果$\hat{\theta}$的数学期望存在，且：

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

如果对于整体中的任意θ，上式都成立，则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

这到底是啥意思？参数为什么能有期望？

无偏性的数学解释

首先需要回顾第一节的内容，清楚地了解这些符号的真正含义。

设总体X的均值为μ，方差是$\sigma^2>0$，它们都是整体分布的参数，且都是待估计的未知参数。既然μ和σ^2都是和总体分布有关的参数，它们自然都可以用θ表示，作为估计量的$\hat{\theta}$也就代表了 $\hat{\mu}$和$\hat{\sigma}^2$。在这个例子中，“$\hat{\theta}$是θ的无偏估计”意味着：

$$E[\hat{\theta}] = \theta \Rightarrow \begin{cases} E[\hat{\mu}] = \mu \\ E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2 \end{cases}$$

如果使用矩估计，则根据再看大数定律（概率统计18）中的内容，样本均值的期望与方差是：

$$E[\hat{\mu}] = E[\bar{X}] = \mu, \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{m}$$

这表明样本均值是整体均值的无偏估计。

样本的方差是：

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$$

这里之所以用X_i而不是x_i，是为了强调样本的随机性，可以简单地理解为计划抽取一个随机样本，但还没有真正开始抽取。

现在看看$E[S^2]$是多少。

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{m-1}E\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{m-1}E[X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2 + m\bar{X}^2 - 2(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)\bar{X}]$$

$$= \frac{1}{m-1}(E[X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2] + E[m\bar{X}^2 - 2(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)\bar{X}])$$

$$E[m\bar{X}^2 - 2(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)\bar{X}] = E[m\bar{X}^2] - 2E[X_1 + X_2 + \cdots + X_m]E[\bar{X}]$$

$$= mE[\bar{X}^2] - 2mE[X]E[\bar{X}]$$

$$= mE[\bar{X}^2] - 2mE[\bar{X}]E[\bar{X}]$$

$$= mE[\bar{X}^2] - 2mE[\bar{X}^2]$$

$$= -mE[\bar{X}^2]$$

$$E[S^2] = \frac{1}{m-1}(E[X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2] - mE[\bar{X}^2])$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}E[X_i^2] - mE[\bar{X}^2]\right)$$

根据方差的性质：

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X]$$

对于样本中的任意一个随机变量来说，方差和期望都相等：

$$E[X_i^2] = Var(X_i) + E^2[X_i] = \sigma^2 + \mu^2$$

此外：

$$E[\bar{X}^2] = Var(\bar{X}) + E^2[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{m} + \mu^2$$

最终：

$$E[S^2] = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}(\sigma^2 + \mu^2) - m\left(\frac{\sigma^2}{m} + \mu^2\right)\right) = \sigma^2$$

上面的结论表明，样本方差S^2也是总体方差的无偏估计，这也附带说明了样本方差的系数是1/(m-1)的原因，如果取1/m，则估计量无法确保无偏性。

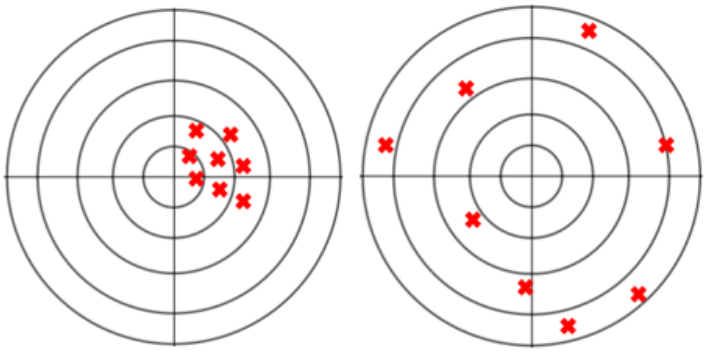
从这个例子中也看出，无论总体符合什么分布，样本均值都是整体均值的无偏估计，样本方差也都是总体方差的无偏估计。

无偏性的意义

样本$X_1, X_2, \ldots, X_m$是随机的，因此根据这些样本得出的估计量 $\hat{\theta}$ 也是随机的，我们已经多次重申过这一点。既然 $\hat{\theta}$ 是随机的，那么一个自然的结论是：根据样本的不同，有些估计量可能偏大，有些可能偏小。反复将这一估计量使用多次，就“平均”来说其偏差为零。

在科学技术中 $E[\hat{\theta}] - \theta$ 称为以 $\hat{\theta}$ 作为θ估计的系统误差。无偏估计的实际意义就是无系统误差。

既然如此，是否意味着无偏估计一定好呢？通常来讲是的，但也不尽然，比如下图中，有偏的甲明显更优于无偏的乙。



甲　　乙

不同的无偏估计量

设总体X服从指数分布，概率密度为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其中参数θ未知，$X_1, X_2, ..., X_m$是来自X的样本，根据指数分布的性质：

$$E[\bar{X}]=E[X]=\theta$$

因此样本均值是参数θ的无偏估计量。

然而估计量不止一种，下面的mZ也是θ的无偏估计量：

$$mZ=m\min\{X_1,X_2,\cdots,X_m\},\qquad Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$$

Z具有概率密度：

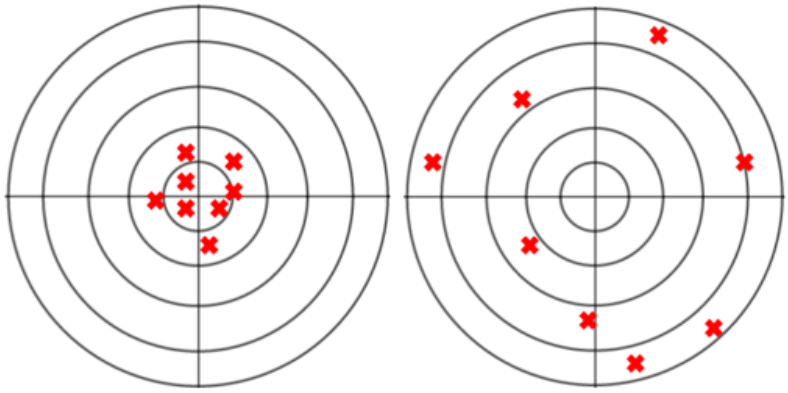
$$f_{min}(x;\theta)=\begin{cases}\frac{m}{\theta}e^{-\frac{mx}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$E[Z]=\frac{\theta}{m},\qquad E[mZ]=\theta$$

可见一个未知参数可能有不同的无偏估计量。

有效性

同一个参数为什么会出现不同的无偏估计量呢？我们可以想象一个场景：任何人都可以估计明天的天气，至于是否准确另当别论。同样是估计天气，气象局的天气预报显然更准确。但就无偏性来说，普通人和天气预报的平均偏差都为0。这就好比甲乙二人的射击比赛，甲的成绩明显高于乙，但无偏性却告诉我们二者的成绩相同，这显然是荒谬的：



对于上图来说，谁的成绩越接近靶心，谁的成绩就越好，这也正是有效性的基本逻辑。对于参数θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$，谁和θ更靠近，谁就越好。一种自然的方式是比较不同的无偏估计量与θ之差的绝对值，但是绝对值不易处理，于是使用平方误差法，这也是一种常用的较为简便的方式。如果对于整体中的任意θ，都有：

$$Var(\hat{\theta}_1) \le Var(\hat{\theta}_2)$$

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

再次强调的是，$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_m)$、$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_m)$都是随机值，因此才通过期望来去掉随机性，进而比较二者谁更有效：

$$E\left[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2\right] = Var(\hat{\theta}_1) \le Var(\hat{\theta}_2) = E\left[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2\right]$$

另一个值得关注的问题是，有效性还强调了对于任意θ∈Θ都成立。如果总体参数θ中包含两个待估计变量，只有当方案1的两个估计量全部优于方案2时，才能说方案1比方案2更有效。

对于上节的指数分布来说：

$$Var(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{m}, \qquad Var(mZ) = \theta^2$$
$$Var(\bar{X}) < Var(mZ)$$

因此$\bar{X}$比mZ更有效。

相合性

简单而言，如果当样本的容量增大时，估计量逐渐收敛于待估计参数的真实值，那么称$\hat{\theta}$是θ的相合估计量。

相合性是对一个估计量的基本要求，如果估计量不具有相合性，那么无论样本的容量有多大，都无法将参数估计得足够准确，这种估计已经有点近似于胡乱猜测。

优化的策略

有了评选标准之后，我们就可以使用一些优化策略，找出最优估计量。

无偏性为估计量加上了限制，有了这条限制，大多数不太好的估计量会被排除。经过无偏性的筛选后，再使用有效性求得的最优解称为最小方差无

偏估计量（uniformly minimum variance unbiased estimate，UMVUE）。

尽管我们可以通过减少候选项的方式找出最优解，但需要认清的事实是，找到任何情况下都适用的全能最优解绝非易事。既然如此，不妨改变策略，弱化最优解的定义，只要满足相合性和渐进有效性，就认为这个解是可以接受的。

渐进有效性：当样本容量n→∞时，$nE\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right]$收敛于理论边界。

最大似然估计就是这种策略下最常用的方案。

在最小方差无偏估计中，我们实际上是想找到总分最优的估计量，但这种方法假设所有参数都是平等的，并没有为参数分配恰当的权重。贝叶斯估计采用了另一种思路应对这个问题。

无论最小方差无偏估计还是最大似然估计，我们都认为待估计参数θ是个确定的值，比如1949年10月1日中华人民共和国成立，这是一个明确的日期。而在贝叶斯估计中，把θ也看作一个变量，所求的是θ的分布，也就是后验分布，如果后验分布较窄，则可信度较高，否则可信度较低。这类似于估计1949年10月1日中华人民共和国成立的概率是多少。贝叶斯估计的难点在于后验概率的计算较为复杂。关于更多先验和后验的问题将在后续章节陆续展开。

随笔

分类: 概率

标签: 最小方差无偏估计, 相合性, 有效性, 无偏性

« 上一篇： 概率统计19——中心极限定理
» 下一篇： 概率统计21——指数分布和无记忆性

posted on 2020-02-24 10:38 我是8位的 阅读(1528) 评论(1) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻：
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...